

# Комбинаторика

Комбинаторика – раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных конфигураций (комбинаций), подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.

При подсчете числа различных комбинаций в комбинаторике используют два основных правила. (**Правило суммы и правило произведения**).

**Правило суммы.** Если объект  $A$  может быть выбран  $m$  различными способами, а объект  $B$  может быть выбран другими  $n$  различными способами при условии, что одновременный выбор  $A$  и  $B$  невозможен, то выбор  $A$  или  $B$  может быть осуществлен  $m + n$  способами.

Пример1: Есть два набора символов  $\{a, b, c\}$  и  $\{r, k\}$ . Сколько существует способов выбора одного символа из первого набора или из второго? В первом наборе 3 символа, а во втором 2, воспользуемся правилом суммы  $2+3=5$ . Ответ: существует 5 различных способов выбора одного элемента.

Пример2: В кафе 5 видов сока и 3 сорта кофе, сколько существует вариантов заказа одного напитка? Ответ:  $5+3=8$  вариантов.

**Правило произведения.** Если объект  $A$  можно выбрать  $m$  способами и если после каждого такого выбора объект  $B$  можно выбрать  $n$  способами, то выбор пары  $(A, B)$  в указанном порядке можно осуществить  $m*n$  способами.

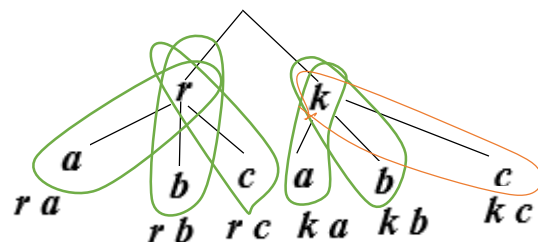
Пример1: Есть два набора символов  $\{a, b, c\}$  и  $\{r, k\}$ . Сколько существует способов выбора пары элементов один символ из первого набора и один из второго? В первом наборе 3 символа, а во втором 2, воспользуемся правилом произведения  $2*3=6$ . Ответ: существует 6 различных способов выбора пары.

Для наглядности составим табличку из наборов  $\{a, b, c\}$  и  $\{r, k\}$ .

|   |     |      |      |      |
|---|-----|------|------|------|
|   |     | 3    |      |      |
|   |     | $a$  | $b$  | $c$  |
| 2 | $r$ | $ra$ | $rb$ | $rc$ |
|   | $k$ | $ka$ | $kb$ | $kc$ |

$2*3=6$  комбинаций

$ra, rb, rc, ka, kb, kc$



Пример2: Обед в столовой из четырех блюд: 3 вида супа, 4 вида второго блюда, 5 салатов и 4 напитка. Сколькими способами можно пообедать из 4-х видов блюд? Ответ:  $3 * 4 * 5 * 4 = \mathbf{240}$  **комбинаций**.

Пример3: Сколько комбинаций, в каждую входят 2 символа, можно составить из букв Е, Г, Э? Каждая буква может входить в слово несколько раз. Ответ:  $3*3=9$  **комбинаций**. (ЕЕ, ЕГ, ЕЭ, ГЕ, ГГ, ГЭ, ЭЕ, ЭГ, ЭЭ).

В комбинаторике вместо решения задач по общим правилам часто удобнее пользоваться готовыми формулами. Дело в том, что некоторые типы задач встречаются значительно чаще других. Комбинациям, которые встречаются в этих задачах, присвоены особые названия – **размещения, перестановки и сочетания**. Для числа таких комбинаций выведены особые формулы, которыми и пользуются при решении различных комбинаторных задач.

### **Размещения без повторений.**

*Имеется  $n$  различных предметов. Сколько из них можно составить  $k$ -расстановок?* При это две расстановки считаются различными, если они либо отличаются друг от друга хотя бы одним элементом, либо состоят из одних и тех же элементов, но расположенных в разном порядке.

Такие расстановки называют размещениями без повторений, а их число обозначают  $A_n^k$

$$A_n^k = n(n-1) \dots (n-k+1)$$

|                                                                |
|----------------------------------------------------------------|
| $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \text{ Размещения без повторений.}$ |
|----------------------------------------------------------------|

Пример1.

Допустим имеется множество  $m$ , состоящее из трех букв {Е, Г, Э}. Составим различные комбинации размещение без повторений из двух букв, имеем: ЕГ, ГЭ, ЭЕ, ЕЭ, GE, ЭГ.

Эти комбинации отличаются друг от друга только расположением букв или самими буквами. Первый элемент мы можем выбрать из 3, а второй элемент из оставшихся 2.  $A_3^2 = 3 * 2 = 6$ .

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3*2*1}{1} = 3 * 2 = 6 \text{ комбинаций.}$$

Пример2. В классе 25 учеников, необходимо выбрать старосту, заместителя старосты и дежурного. Сколько вариантов можем составить. Старосту можем

выбрать из 25 учеников, заместителя можем выбрать из 24 учеников, а дежурного из оставшихся 23 учеников, тогда получаем  $A_{25}^3 = 25 * 24 * 23 = 13800$  вариантов выбора старосты, заместителя и дежурного.  $A_{25}^3 = \frac{25!}{(25-3)!} = \frac{25*24*23*22!}{22!} = 25 * 24 * 23 = 13800$

### Перестановки без повторений.

При составлении размещений без повторений из  $n$  элементов по  $k$  мы получали расстановки, отличающиеся друг от друга и составом, и порядком элементов. Но если брать расстановки, в которые входят все  $n$  элементов, то они могут отличаться друг от друга лишь порядком входящих в них элементов. Такие расстановки называют перестановками из  $n$  элементов.

Иными словами,  ***$n$ -перестановками называют размещения без повторения из  $n$  элементов, в которые входят все элементы.***

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

$$P_n = n! \text{ Перестановки без повторений.}$$

**Пример1.** Допустим, возьмём три буквы **Е**, **Г** и **Э**. Из этих букв составим всевозможные комбинации, т.е. **ЕГЭ**, **ЕЭГ**, **ГЭЕ**, **ГЕЭ**, **ЭЕГ**, **ЭГЕ**. Эти комбинации отличаются друг от друга только расположением букв.  $P_3 = 3! = 3 * 2 * 1 = 6$  перестановок.

**Пример2.** В соревнованиях участвуют 5 команд. Сколько вариантов распределения мест между ними возможно? Ответ:  $P_5 = 5! = 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 120$  вариантов.

### Сочетания без повторений.

В тех случаях, когда нас не интересует порядок элементов в комбинации, а интересует лишь ее состав, говорят о сочетаниях. Итак,  **$k$ -сочетаниями из  $n$  элементов** называют всевозможные  **$k$ -расстановки**, составленные из этих элементов и отличающиеся друг от друга составом, но не порядком элементов. Число  **$k$ -сочетаний**, которые можно составить из  $n$ -элементов, обозначают  $C_n^k$ .

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}. \text{ Сочетания без повторений.}$$

*Пример1.* Допустим, имеется три буквы **Е**, **Г** и **Э**. Составим всевозможные комбинации только из двух букв, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом: **ЕГ**, **ЕЭ**, **ГЭ**.

При подсчете числа сочетаний элементов — порядок не важен.

$$C_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!2!} = \frac{3*2*1}{1*2*1} = 3 \text{ комбинации.}$$

*Пример2.* В классе 25 учащихся. Сколькими способами можно выделить двух человек для дежурства? Так как каждая группа учащихся в 2 человека должна отличаться хотя бы одним из учащихся. Отсюда, применим формулу комбинаторики — сочетание, имеем

$$C_{25}^2 = \frac{25!}{(25-2)!*2!} = \frac{25*24*23!}{23!*2*1} = \frac{25*24}{2} = 25 * 12 = 300 \text{ способов.}$$

**Список литературы: Комбинаторика Н.Я.Виленкин 1969г.**